ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΔΟΜΕΣ Ι

Πεμπτη 10 Σεπτεμβριου 2015

α 1. **1. [5]** Να δειχθεί ότι αν μια αβελιανή ομάδα G περιέχει δύο στοιχεία a και b τάξης 2, τότε περιέχει ως υποομάδα μια ομάδα H η οποία είναι ισόμορφη με την ομάδα του Klein.

2. Έστω H και K υποομάδες μιας ομάδας G με τάξεις 8 και 13 αντίστοιχα.

(α') **[5]** Να βρεθεί η τάξη της υποομάδας $H \cap K$.

(β') **[5]** Να δείξετε ότι αν η ομάδα G είναι αβελιανή με τάξη 104, τότε η G είναι ισόμορφη με την ομάδα ευθύ γινόμενο $G/H \times G/K$. Είναι η G κυκλική;

ι 2. **[15]** Θεωρούμε την ακόλουθη μετάθεση

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 11 & 5 & 8 & 1 & 7 & 9 & 3 & 2 & 12 & 6 & 4 & 10 & 15 & 14 & 13 \end{pmatrix} \in S_{15}$$

1. Να γραφεί η σ ως γινόμενο ξένων κύκλων και ως γινόμενο αντιμεταθέσεων.

2. Να εξετασθεί αν η σ είναι άρτια ή περιττή μετάθεση, και να βρεθεί η τάξη της.

3. Να βρεθεί η ματάθεση σ^{4444}.

ι 3. **[20]** Θεωρούμε ακεραίους n, m, r, όπου $n, m > 0$, και υποθέτουμε ότι $m \mid nr$.

1. Να δειχθεί ότι η απεικόνιση

$$f \colon \mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{Z}_m, \quad \text{έτσι ώστε} \quad f([x]_n) = [rx]_m$$

είναι ομομορφισμός ομάδων.

2. Να βρεθεί αναγκαία και ικανή συνθήκη έτσι ώστε η f να είναι επιμορφισμός.

3. Αν η f είναι επιμορφισμός ομάδων, με ποιά γνωστή σας ομάδα είναι ισόμορφη η υποομάδα $\mathrm{Ker}(f)$;

4. Αν $n = 2016$, $m = 168$ και $r = 1$, να βρεθεί το διάγραμμα Hasse των υποομάδων της ομάδας $\mathrm{Ker}(f)$.

4. **[20]** Θεωρούμε το ακόλουθο σύνολο 3×3 πινάκων πραγματικών αριθμών:

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 & x \\ x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}) \;\middle|\; x \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \right\}$$

1. Να δειχθεί ότι το σύνολο G εφοδιασμένο με την συνήθη πράξη πολλαπλασιασμού πινάκων αποτελεί ομάδα.

2. Με ποιά γνωστή σας ομάδα είναι ισόμορφη η ομάδα G;

3. Να βρεθεί μια κανονική υποομάδα H της G έτσι ώστε η ομάδα πηλίκο G/H να είναι ισόμορφη με την (προσθετική) ομάδα $\mathbb{Z}_2$.

5. **[20]** Θεωρούμε το ακόλουθο σύνολο 3×3 πινάκων

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}) \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

. Να δειχθεί ότι το σύνολο R είναι ένας μεταθετικός υποδακτύλιος του δακτυλίου $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.

. Να βρεθεί ένα μέγιστο ιδεώδες του R.

. Να δειχθεί ότι υπάρχει ένας ισομορφισμός δακτυλίων $\mathbb{R}[t]/(t^3) \cong R$, όπου (t^3) είναι το κύριο ιδεώδες του δακτυλίου πολυωνύμων $\mathbb{R}[t]$ το οποίο παράγεται από το πολυώνυμο t^3.

6. **[10]** Έστω R ένας δακτύλιος με μονάδα ο οποίος είναι δακτύλιος του Boole, δηλαδή: $r^2 = r$, $\forall r \in R$.

. Να δειχθεί ότι ο δακτύλιος R είναι μεταθετικός. Ποιά είναι η χαρακτηριστική του R;

. Να δειχθεί ότι κάθε πρώτο ιδεώδες του R είναι μέγιστο.

7. **[10]** Να βρεθούν όλοι οι ομομορφισμοί δακτυλίων (α) $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ και (β) $\mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{Z}$.

Καλή Επιτυχία!